$$\log_3^2\left(x^2+5x-5\right)+3\log_3^2(x)=4\log_3(x)\log_3\left(x^2+5x-5\right)$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x>0 \\ x^2+5x-5>0 \\ \log_3^2\left(x^2+5x-5\right)+3\log_3^2(x)=4\log_3(x)\log_3\left(x^2+5x-5\right) \end{cases}$$

Произведем замену переменных

$$\begin{cases} a=\log_3(x) \\ b=\log_3\left(x^2+5x-5\right) \\ 3a^2+b^2-4ab=0 \\ x>\dfrac{-5+3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Преобразуем уравнение.

$$3a^2+b^2-3ab-ab=0$$

$$3a^2-3ab-ab+b^2=0$$

$$\left(3a^2-3ab\right)-\left(ab-b^2\right)=0$$

$$(a-b)(3a)-(a-b)b=0$$

$$(a-b)(3a-b)=0$$

$$\begin{cases} a=\log_3(x) \\ b=\log_3\left(x^2+5x-5\right) \\ \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ 3a-b=0 \end{array}\right. \\ x>\dfrac{-5+3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Случай 1

$$\begin{cases} \log_3(x) = \log_3\left(x^2+5x-5\right) \\ x > \dfrac{-5+3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x^2+5x-5 \\ x > \dfrac{-5+3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Решаем вспомогательное уравнение.

$$x = x^2+5x-5$$

$$x^2+4x-5=0$$

$$D=b^2-4ac=4^2-4\cdot 1(-5)=36$$

$$x_1=\frac{-4-6}{2\cdot 1}=-5;\ x_2=\frac{-4+6}{2\cdot 1}=1$$

Итак, ответ этого случая:

x
1

Случай 2

$$\begin{cases} a=\log_3(x) \\ b=\log_3\left(x^2+5x-5\right) \\ b=3a \\ x > \dfrac{-5+3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \log_3\left(x^2+5x-5\right) = 3\log_3(x) \\ x > \dfrac{-5+3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\log_3\left(x^2+5x-5\right) = \log_3\left(x^3\right)$$

$$x^2+5x-5=x^3$$

$$\begin{cases} x^2+5x-5=x^3 \\ x > \dfrac{-5+3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Решаем вспомогательное уравнение.

$$x^2+5x-5=x^3$$

$$x^3-x^2-5x+5=0$$

$$(x^2-5)(x-1)=0$$

$$x=-\sqrt{5};x=\sqrt{5}$$

$$x=1$$

Итак, ответ этого случая:

x
1
$\sqrt{5}$

Окончательный ответ:

x
1
$\sqrt{5}$